



## Guía de Aprendizaje N°3 Unidad Uno ♥ Álgebra Cuarto Medio

Nombre:

Curso:

Fecha:

Aprendizajes Esperados:

(AE3) Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible.

Importante: No es obligación imprimir esta guía, puedes copiarla en tu cuaderno o estudiarla desde tu computador o dispositivo móvil. Consultas al correo electrónico [karinna@cesp.cl](mailto:karinna@cesp.cl)

### FUNCIÓN INVERSA

- La función inversa de  $f(x)$  se simboliza por  $f^{-1}(x)$ .
- $f^{-1}(x)$  corresponde a la función inversa de  $f(x)$  si se cumple que:  
 $f(a) = b \leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ , para cualquier valor de  $a$  en  $A$ , y cualquier valor  $b$  de  $B$ .
- En toda función inversa se cumple que: **Dom  $f = \text{Rec } f^{-1}$  y  $\text{Rec } f = \text{Dom } f^{-1}$**

### CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Una de las formas de obtener la función inversa de  $f(x)$  es despejar la variable  $x$  de la expresión  $y = f(x)$ . Luego, intercambiar las variables  $x$  e  $y$ . No siempre la inversa de una función es función.

#### EJEMPLO

La función inversa de  $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ , con  $x \neq 5$ , se puede calcular de la siguiente forma:

1° Se escribe  $f(x)$  como  $y = \frac{x+2}{x-5}$

2° Despejar  $x$ .

$$y = \frac{x+2}{x-5} \rightarrow y(x-5) = x+2$$

$$yx - 5y = x + 2$$

$$yx - x = 5y + 2$$

$$x(y-1) = 5y + 2$$

$$x = \frac{5y+2}{y-1}$$

$\cdot (x-5)$

Multiplicación término a término

Reordenamiento para despejar  $x$

Factorización por término común

$\cdot (y-1)$

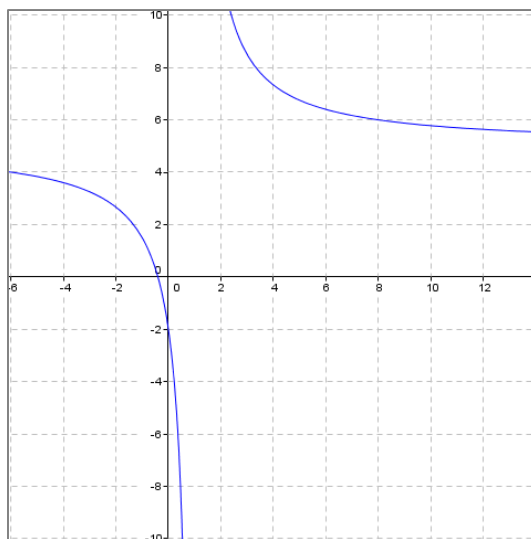
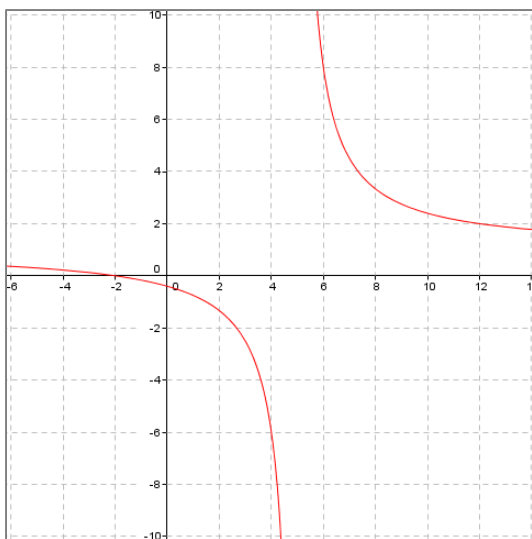
3° Al intercambiar las variables  $x$  e  $y$  se obtiene:  $y = \frac{5x+2}{x-1}$

4° Luego, se tiene que la inversa de  $f(x)$  es  $f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{x-1}$

Además, para ambas:

- $Dom f = \mathbb{R} - \{5\}$  y  $Rec f = \mathbb{R} - \{1\}$
- $Dom f^{-1} = \mathbb{R} - \{1\}$  y  $Rec f^{-1} = \mathbb{R} - \{5\}$

Los gráficos siguientes corresponden a  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$ , respectivamente.



## EJEMPLO

Si  $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ , entonces  $f^{-1}$  es:

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \rightarrow 9y = 5(x - 32)$$

/·9

$$\frac{9}{5}y = x - 32$$

/:5

$$\frac{9}{5}y + 32 = x$$

Reordenamiento para despejar x

$$f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

Cambio de variables

## EJEMPLO

La función inversa de  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $x \geq 0$ , es  $f^{-1}(x) = x^2$ , ya que:

1° Al reescribir  $f(x)$  en términos de  $y$  se obtiene:  $y = \sqrt{x}$ .

2° Para despejar  $x$ , por definición de raíz cuadrada de un número, se tiene que:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \rightarrow x = y^2$$

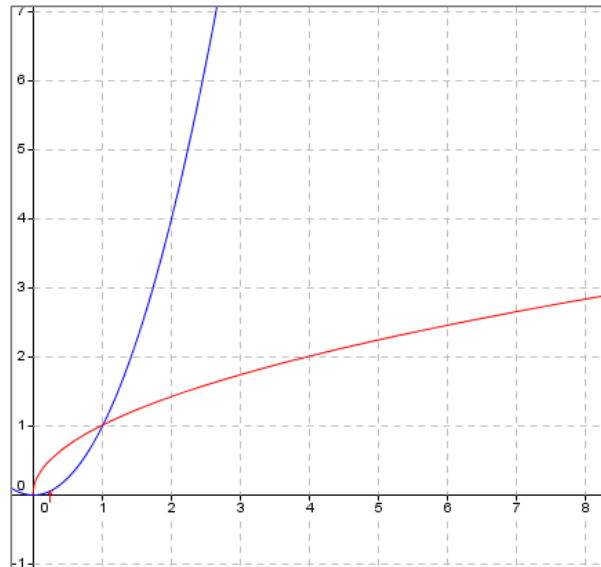
3° Al intercambiar las variables  $x$  e  $y$  se obtiene:  $y = x^2$ .

4° Luego,  $f^{-1}(x) = x^2$ .

Además:

- $Dom f = \mathbb{R}_0^+$  y  $Rec f = \mathbb{R}_0^+$
- $Dom f^{-1} = \mathbb{R}_0^+$  y  $Rec f^{-1} = \mathbb{R}_0^+$

Los gráficos de  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$ , respectivamente son:



### TIPS:

#### Criterio de la recta horizontal

No todas las funciones tienen inversa. Por ahora, puedes utilizar un método que se basa en el gráfico para saber si una función tiene o no tiene inversa. Uno de los métodos consiste en trazar una recta imaginaria paralela al eje X y verla de arriba abajo. Si interseca a la función en dos o más puntos, entonces la función NO tiene inversa.

## EJERCICIOS

### Ejercicio 1:

a) Encuentra la inversa de la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} \quad \text{con } x \neq 3$$

b) ¿Cuál es el dominio de  $f^{-1}(x)$ ?

c) ¿Cuál es el recorrido de  $f^{-1}(x)$ ?

### Ejercicio 2:

Encuentra la función inversa para:

a)  $y = \frac{3x-5}{10}$

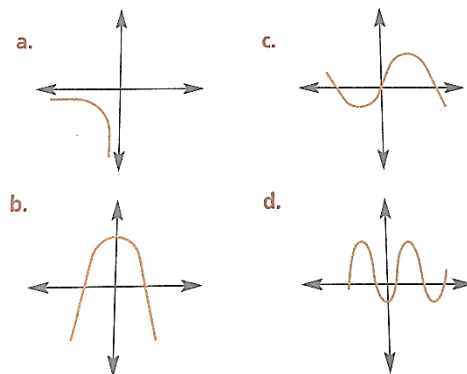
b)  $y = 3 + \sqrt{x-4}$

c)  $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$

d)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

### Ejercicio 3:

Determina, a partir del gráfico, cuáles de las siguientes funciones tienen inversas.



### Ejercicio 4:

Determinar cuál de las siguientes funciones tiene inversa. Para aquellas funciones que la tengan, indicar su dominio y recorrido. En caso contrario, justificar por qué no tienen inversa.

a)  $f(x) = 5x - 12$

b)  $g(x) = -x^2 + 4$

c)  $h(x) = \frac{x-2}{x+7} \quad \text{con } x \neq -7$

d)  $m(x) = x^3 - 1$

e)  $f(x) = 7 - \sqrt{x-3}$

f)  $g(x) = |x| - 8$